Aufgabe 1: Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung

(WV_Eigenschaften)

Zeigen Sie, dass die Auto-Wigner-Ville-Verteilung reell ist, selbst wenn das Signal komplex ist.

Lösung

Die Auto-Wigner-Ville-Verteilung lautet:

$$W_{xx}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau} \,\mathrm{d}\,\tau$$

Um zu zeigen, dass diese Funktion reellwertig ist, wird die Äquivalenz $W^*_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f)$ bewiesen:

$$\begin{aligned}
W^*_{xx}(t,f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*\left(t+\frac{\tau}{2}\right) x\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f\tau} \,\mathrm{d}\,\tau \qquad \text{Substitution: } \tau' = -\tau \\
&= -\int_{\infty}^{-\infty} x^*\left(t-\frac{\tau'}{2}\right) x\left(t+\frac{\tau'}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau'} \,\mathrm{d}\,\tau' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau'}{2}\right) x^*\left(t-\frac{\tau'}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau'} \,\mathrm{d}\,\tau' \\
&= W_{xx}(t,f)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Kreuzterme

(WV_Kreuzterm)

Gegeben ist folgendes Signal:

$$y(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}$$

a) Bestimmen Sie den Wignerkern

$$w_{yy}(t,\tau) = y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

b) Bestimmen Sie die Verteilung

$$W_{yy}(t,f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{yy}(t,\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f\tau}\;\mathrm{d}\,\tau$$

c) Welcher Term des Ergebnisses entspricht dem Nutzterm, welcher dem Kreuzterm?

Lösung

a) Der Wignerkern ist gegeben durch:

$$w_{yy}(t,\tau) = y\big(t + \frac{\tau}{2}\big) \cdot y^*\big(t - \frac{\tau}{2}\big)$$

Mit $y(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}$ folgt daraus für das Signal:

$$\begin{aligned} w_{yy}(t,\tau) &= \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 \frac{\tau}{2}}\right)\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi f_0 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 \frac{\tau}{2}}\right) \\ &= 1 + \underbrace{\mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}\,\mathrm{e}^{j2\pi f_0 \frac{\tau}{2}} + \mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\,\mathrm{e}^{j2\pi f_0 \frac{\tau}{2}}}_{2\cos(2\pi f_0 t)\exp\left(\mathrm{j}\,2\pi \frac{f_0}{2}\tau\right)} + \mathrm{e}^{j2\pi f_0 \tau} \\ &= \underbrace{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 \tau}}_{\text{Nutzterm}} + \underbrace{2\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi \frac{f_0}{2}\tau}}_{\text{Kreuzterm}} \end{aligned}$$

b) Die Wigner-Ville-Verteilung ist die Fourier-Transformierte des Wignerkerns $w_{yy}(t,\tau)$ bezüglich τ. Mit Hilfe der Korrespondenzen

$$\begin{aligned} 1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \delta(f) \\ 2\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi \frac{f_0}{2}\tau} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\cos(2\pi f_0 t)\,\delta\left(f - \frac{f_0}{2}\right) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi f_0 \tau} &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

kann die Wigner-Ville-Transformierte zusammengesetzt werden:

$$W_{yy}(t,f) = \underbrace{\delta(f) + \delta(f - f_0)}_{\text{Nutzterm}} + \underbrace{2\cos\big(2\pi f_0 t\big)\delta\left(f - \frac{f_0}{2}\right)}_{\text{Kreuzterm}}$$

c) Siehe b). Der Kreuzterm oszilliert mit der Differenzfrequenz $\Delta f = f_0 - 0 = f_0$ der beiden Signalanteile und liegt in ihrer mittleren Frequenz $\bar{f} = \frac{f_0 - 0}{2} = \frac{f_0}{2}$.

Aufgabe 4: Choi-Williams-Verteilung

(ChoiWilliamsVerteilung)

Nach Abschnitt 2.4 ist die Cohen-Klasse

$$C_{xx}(t,f) = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} \mathcal{F}_\tau\{\mathcal{F}_\vartheta\{\Phi(\tau,\vartheta)\}\} = W_{xx}(t,f) \underset{t',f'}{\overset{*}{*}} \Pi(t,f)$$

identisch mit dem Spektrogramm $S_x^\gamma(t,f)$, wenn für die Glättungsfunktion

$$\Pi(t,f) = W_{\gamma\gamma}(-t,-f) = W_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(t,f)\,, \qquad \gamma^\sharp(t) := \gamma^*(-t)$$

gilt. Das bedeutet, dass die Kernfunktion $\Phi(\tau,\vartheta)$ die Ambiguitätsfunktion einer Fensterfunktion $\gamma^\sharp(t)$ ist:

$$\Phi(\tau,\vartheta) = A_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(\tau,\vartheta)$$

Zeigen Sie, dass die Choi-Williams-Verteilung mit der Kernfunktion

$$\Phi(\tau,\vartheta) = \exp(-\alpha\vartheta^2\tau^2)$$

nicht als Spektrogramm interpretiert werden kann.

Hinweis: Leiten Sie zunächst eine Methode her, mit der ein Signal aus seiner Ambiguitätsfunktion rekonstruiert werden kann. Zeigen Sie dann, dass kein Signal existiert, dessen Ambiguitätsfunktion der Kernfunktion der Choi-Williams-Verteilung entspricht.

Lösung

Rekonstruktion eines Signals aus der Ambiguitätsfunktion

Wie bei der Wigner-Ville-Verteilung kann auch bei der Ambiguitätsfunktion die Phasenlage des Signals nicht rekonstruiert werden.

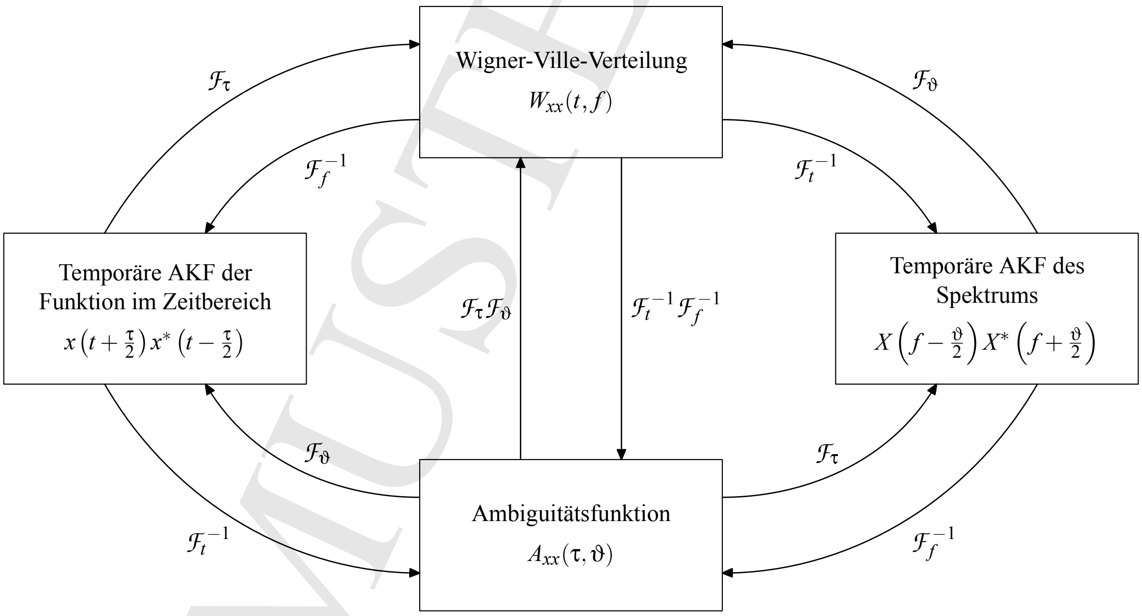

Abbildung L1: Zusammenhang zwischen der Wigner-Ville-Verteilung und der Ambiguitätsfunktion

Nach Abb. L1 gilt:

$$x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)=\mathcal{F}_\vartheta\left\{A_{xx}(\tau,\vartheta)\right\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_{xx}(\tau,\vartheta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta t}\,\mathrm{d}\,\vartheta$$

Für $t=\frac{\tau}{2}$ ergibt sich:

$$\tilde{x}(\tau)\coloneqq x(\tau)x^*(0)=\mathcal{F}_\vartheta\left\{A_{xx}(\tau,\vartheta)\right\}\Big|_{t=\frac{\tau}{2}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}A_{xx}(\tau,\vartheta)\exp\left(-\mathrm{j}\,2\pi\vartheta\frac{\tau}{2}\right)\,\mathrm{d}\,\vartheta$$

Schließlich wird die Signalenergie angeglichen:

$$\hat{x}(\tau)=\sqrt{\frac{E_x}{E_{\tilde{x}}}}\cdot\tilde{x}(\tau)=\sqrt{\frac{A_{xx}(0,0)}{E_{\tilde{x}}}}\cdot\tilde{x}(\tau)$$

Der Verlauf des Signals $\tilde{x}(\tau)$ stimmt mit dem des ursprünglichen Signals überein. Beide Signale können sich jedoch um einen konstanten Faktor vom Betrag Eins unterscheiden.

Choi-Williams-Verteilung

Im Folgenden wird die Kernfunktion der Choi-Williams-Verteilung als Ambiguitätsfunktion interpretiert und versucht das zugehörige Signal zu rekonstruieren.

$$\Phi(\tau,\vartheta)=\exp(-\alpha\vartheta^2\tau^2)\stackrel{!}{=}A_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(\tau,\vartheta)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^\sharp(\tau)&=\gamma^\sharp(\tau)\gamma^{\sharp*}(0)=\mathcal{F}_\vartheta\big\{\exp(-\alpha\tau^2\vartheta^2)\big\}\Big|_{t=\frac{\tau}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\tau^2}}\exp\left(-\frac{\pi^2t^2}{\alpha\tau^2}\right)\Big|_{t=\frac{\tau}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\frac{1}{|\tau|}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4\alpha}\right)\end{aligned}$$

Dieses Signal soll nun auf die Signalenergie

$$E_{\gamma^\sharp}=A_{\gamma^\sharp\gamma^\sharp}(0,0)=1$$

normiert werden. Dann folgt für das rekonstruierte Signal:

$$\hat{\gamma}^\sharp(\tau)=\frac{\tilde{\gamma}^\sharp(\tau)}{\sqrt{E_{\tilde{\gamma}^\sharp}}}$$

Es gilt jedoch:

$$E_{\tilde{\gamma}^\sharp}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\gamma}^\sharp(\tau)\right|^2\,\mathrm{d}\,\tau=\frac{\pi}{\alpha}\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2}{2\alpha}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau^2}\,\mathrm{d}\,\tau=\infty$$

Das Signal $\tilde{\gamma}^\sharp(\tau)$ ist also kein Energiesignal, daher ist eine Normierung auf eine endliche Signalenergie nicht möglich. Die Kernfunktion der Choi-Williams-Verteilung kann somit nicht als Ambiguitätsfunktion einer Fensterfunktion interpretiert werden, woraus folgt, dass die Choi-Williams-Verteilung kein Spektrogramm ist.